السكشن الرابع (تكامل I)
الفرقة الاولى علوم طبيعية
4/3/2019

ناقشنا فى السكشن الماضى ماهية التكامل المحدود وذكرنا ان التكامل المحدود هو عبارة عن النهاية لمجاميع ريمان عندما تؤول عدد التقسيمات الى المالانهاية. ولكن لهذا التكامل المحدود خصائص وصفات يتميز بها نذكرها بالتفصيل فى هذا السكشن.

خواص التكامل المحدود Properties of Definite Integrals

TABLE Rules satisfied by definite integrals

1. *Order of Integration:* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ — A Definition

2. *Zero Width Interval:* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ — A Definition when $f(a)$ exists

3. *Constant Multiple:* $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ — Any constant k

4. *Sum and Difference:* $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

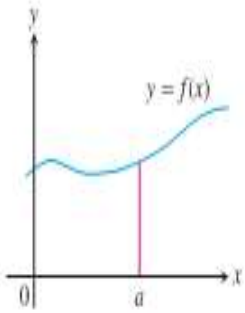
5. *Additivity:* $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

6. *Max-Min Inequality:* If f has maximum value max f and minimum value min f on $[a, b]$, then

$$\min f \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b - a).$$

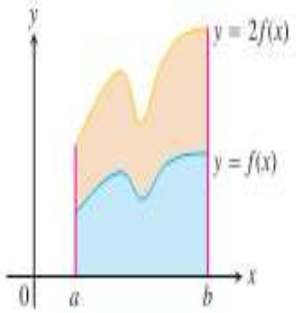
7. *Domination:* $f(x) \ge g(x)$ on $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

$f(x) \ge 0$ on $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (Special Case)



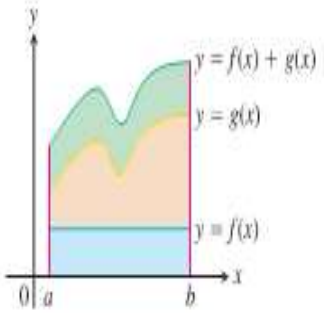
(a) *Zero Width Interval:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



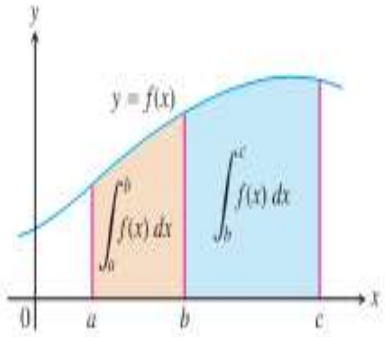
(b) *Constant Multiple:* $(k = 2)$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$



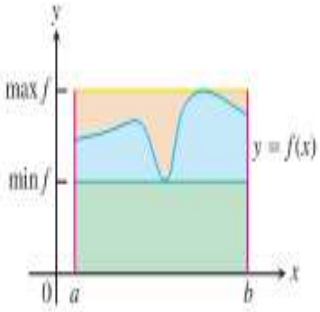
(c) *Sum: (areas add)*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



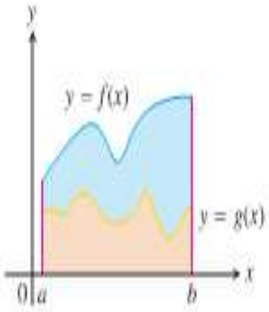
(d) *Additivity for definite integrals:*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



(e) *Max-Min Inequality:*

$$\min f \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max f \cdot (b-a)$$



(f) *Domination:*

$$f(x) \ge g(x) \text{ on } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

FIGURE 1.6 Geometric interpretations of Rules 2–7

تمرين:

Using the Definite Integral Rules

9. Suppose that f and g are integrable and that

$$\int_1^2 f(x)\,dx = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8.$$

Then find:

a. $\int_2^2 g(x)\,dx$ **b.** $\int_5^1 g(x)\,dx$

c. $\int_1^2 3f(x)\,dx$ **d.** $\int_2^5 f(x)\,dx$

e. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx$ **f.** $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx$

نقدم نظرية مهمة تتعلق بالدوال المتماثلة:

نظرية

لتكن الدالة f متصلة على الفترة المتماثلة $[-a,a]$ فان

(1) اذا كانت f زوجية فان $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(2) اذا كانت f فردية فان $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

تمرين:

احسب قيمة التكامل $\int_{-2}^{2}(x^4 - 4x^2 + 6)dx$

تمرين

احسب قيمة التكامل $\int_{-2}^{2}(x^{99}cosx)dx$

****